DS de mathématiques n°7.2

Systèmes linéaires, polynômes, relations de comparaison – Corrigé

Noté sur 56,5 pts $\pm 2,5$ pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par $20/45$.

1 Inversibilité et puissances de matrices de taille 2

/13,5

Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

/1,5 **1)** Calculer $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2$.

Après calculs (à détailler sur la copie), on trouve qu'il s'agit de la matrice nulle de taille 2.

/3,5 **2)** En déduire que dans le cas $ad - bc \neq 0$, la matrice A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de a, b, c, d.

On a :

$$A \times (A - (a+d)I_2) = -(ad-bc)I_2$$
$$\Longrightarrow A \times \frac{1}{-(ad-bc)}(A - (a+d)I_2) = I_2$$

Ainsi, A est inversible et son inverse est

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{-(ad-bc)}(A - (a+d)I_2) \\ &= \frac{1}{-(ad-bc)} \times \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{ad-bc} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

/3,5 **3)** On suppose que $ad - bc = 0$. Montrer que A n'est pas inversible en raisonnant par l'absurde.

On a $A^2 - (a+d)A = 0_{2,2}$, donc $A^2 = (a+d)A$. Supposons par l'absurde que A soit inversible. Alors en multipliant par A^{-1}, on a

$$A = (a+d)I_2 = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$$

Or, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ce qui impose $\begin{cases} a+d = a \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a+d = d \end{cases}$ $\begin{cases} d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$ Ainsi, $A = 0_{2,2}$. Or, la matrice nulle n'est pas inversible (comme tout élément nul d'un anneau). Contradiction. Donc A n'est pas inversible.

/5 **4)** On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$ pour deux réels α_n et β_n qu'on précisera. On pourra dans un premier temps déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$.

- 3 points pour trouver le reste de la division euclidienne.
- 2 points pour l'évaluation en A et la conclusion.

On note Q le quotient et R le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$. On a donc

$$X^n = (X^2 - X - 2)Q + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg \left(X^2 - X - 2\right)$$

En particulier, $\deg R \leq 1$, de sorte qu'on peut poser $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Donc

$$X^n = (X^2 - X - 2)Q + (aX + b)$$

Or, $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$. En évaluant la relation ci-dessus en -1 et en 2, on trouve

$$\begin{cases} (-1)^n = -a + b \\ 2^n = 2a + b \end{cases} \quad \begin{cases} b = (-1)^n + a \\ 2^n - (-1)^n = 3a \quad L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} \\ b = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{cases}$$

On trouve donc que le reste est :

$$\boxed{R = \frac{2^n - (-1)^n}{3} X + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}}$$

Calculons A^n. Par la question **1)**, on a

$$A^2 - A - 2I_2 = 0_{2,2}$$

de sorte que, lorsqu'on évalue $X^n = (X^2 - X - 2)Q + R$, on obtient

$$A^n = R(A) = \boxed{\frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_2}$$

/43 2 Une équation polynômiale

On souhaite déterminer tous les couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que

$$P(X)^2 + (1 - X^2)Q(X)^2 = 1 \qquad (\star)$$

On raisonne par analyse–synthèse. On se donne une fois pour toutes un couple (P, Q) solution de $(\star)$.

On note n le degré de P.

1) Déterminer les couples (P, Q) solutions de $(\star)$ pour lesquels P est
/3,5 constant.

On suppose que $P = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. On a donc

$$(1 - X^2)Q^2 = 1 - \lambda^2$$

On passe alors au degré. D'une part,

$$\begin{aligned} \deg\left((1 - X^2)Q^2\right) &= \deg\left(1 - X^2\right) + \deg(Q^2) \\ &= 2 + 2\deg Q \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\deg(1 - \lambda^2) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda \in \{-1, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— Si $\lambda \in \{-1, 1\}$, alors $2 + 2\deg Q = -\infty$, ce qui entraine nécessairement $\deg Q = -\infty$. Dans ce cas, on trouve que $(P, Q) = (1, 0)$ ou $(P, Q) = (-1, 0)$.

— Si $\lambda \notin \{-1, 1\}$, alors $2 + 2\deg Q = 0$, ce qui est impossible car $\deg Q \neq -1$.

En synthèse, on vérifie que les couples $(P, Q) = \boxed{(1, 0)}$ et $(P, Q) = \boxed{(-1, 0)}$ sont bien solutions.

Dans la suite, on suppose que P n'est pas constant. On peut en particulier en déduire que Q est non nul.

/3,5 **2)** **a)** Montrer que Q divise PP'.

En dérivant $(\star)$, on obtient

$$2PP' - 2XQ^2 + (1 - X^2) \times 2QQ' = 0$$

ce qui se réécrit

$$PP' = XQ^2 - (1 - X^2) \times QQ'$$

et donc

$$Q \times \left[XQ - (1 - X^2)Q'\right] = PP'$$

ce qui permet de conclure que Q divise PP'.

/3,5 **b)** En déduire que Q divise P'.

Par hypothèse, avec $U = P$ et $V = (1 - X^2)Q$, on a :

$$PU + QV = 1$$

Par le théorème de Bézout, on en déduit que $P \wedge Q = 1$. Ensuite, par le lemme de Gauss, et le fait que $Q \mid PP'$, on en déduit que $Q \mid P'$.

c) Montrer que $\deg(Q) = n - 1$. En déduire que $Q = \lambda P'$ pour un
/3,5 certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

On sait que

$$(1 - X^2)Q^2 = 1 - P^2$$

En passant au degré, on en déduit que

$$2 + 2\deg(Q) = \deg(1 - P^2)$$

Or, P est supposé non constant, donc $\deg P \geq 1$, et par suite $\deg(P^2) \geq 1$. Ainsi,

$$\deg(1 - P^2) = \deg(P^2) = 2\deg P = 2n$$

On en conclut que

$$2 + 2\deg Q = 2n$$

ou encore

$$\boxed{\deg(Q) = n - 1} = \deg(P') \qquad \text{car } \deg P \geq 1$$

Comme Q divise P', que $\deg(Q) = \deg(P')$ et que P' est non nul (car $\deg P \geq 1$), on en déduit que $\boxed{Q = \lambda P'}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) On note à présent α le coefficient dominant de P et β celui de Q. Grâce aux carrés dans la relation $(\star)$, et quitte à remplacer Q par $-Q$, on peut supposer α et β de même signe.

/2,5 **a)** Montrer que $\alpha = \beta$.

On note $\mathrm{cd}(R)$ le coefficient dominant d'un polynôme non nul R. On sait que $(1-X^2)Q^2 = 1 - P^2$, donc les coefficients dominants de ces polynômes sont égaux. Or, comme $\deg P \geq 1$, on a

$$\mathrm{cd}(1-P^2) = \mathrm{cd}(-P^2) = -\beta^2$$

$$\mathrm{cd}((1-X^2)Q^2) = \mathrm{cd}(1-X^2)\mathrm{cd}(Q^2) = -\alpha^2$$

Ainsi, $-\alpha^2 = -\beta^2$, donc $\alpha^2 = \beta^2$, et par suite $|\alpha| = |\beta|$. Comme α et β ont même signe, on en déduit que $\boxed{\alpha = \beta}$.

b) En déduire que $Q = \dfrac{1}{n}P'$, puis que

$$(1-X^2)P'' - XP' + n^2P = 0$$

/5,5

— 2,5 points pour justifier que $\lambda = \dfrac{1}{n}$

— 3 points pour obtenir l'équation

Par la question **c)** , on sait que $Q = \lambda P'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Il suffit de montrer que $\lambda = \dfrac{1}{n}$. Comme $n = \deg P$ le terme dominant de P est αX^n. On en déduit que celui de P' est $\alpha n X^{n-1}$, et donc le coefficient dominant de P' est αn.

Ainsi, lorsqu'on passe au coefficient dominant dans la relation $Q = \lambda P'$, on obtient $\beta = \lambda \alpha n$, donc, comme $\alpha = \beta$ et que $\alpha \neq 0$ (car un coefficient dominant n'est jamais nul), on obtient $\lambda n = 1$, donc $\lambda = \boxed{\dfrac{1}{n}}$.

En substituant Q par $\dfrac{1}{n}P'$ dans $(\star)$, on en déduit que

$$P^2 + (1-X^2)\left(\frac{1}{n}P'\right)^2 = 1$$

ou encore

$$n^2P^2 + (1-X^2)\left(P'\right)^2 = n^2$$

En dérivant cela, on trouve que

$$2n^2PP' - 2X\left(P'\right)^2 + 2(1-X^2)P'P'' = 0$$

Or, comme P est non constant, P' est non nul, si bien qu'en divisant la relation par $2P'$:

$$\boxed{n^2P - XP' + (1-X^2)P'' = 0}$$

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(\theta) = P(\cos\theta)$.

a) Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, puis qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$f(\theta) = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$$

/4

— 2,5 points pour obtenir l'ED

— 1,5 point pour en déduire f

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par composée de telles fonctions (l'une d'elle étant la fonction polynômiale $x \mapsto P(x)$). Ensuite, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(\theta) = P'(\cos\theta) \times (-\sin\theta)$$

$$\begin{aligned} f''(\theta) &= P'(\cos\theta) \times (-\cos\theta) + P''(\cos\theta) \times (-\sin\theta)^2 \\ &= P'(\cos\theta) \times (-\cos\theta) + P''(\cos\theta) \times \sin^2\theta \end{aligned}$$

Or, par la question **b)** , on a

$$n^2P(X) - XP'(X) + (1-X^2)P''(X) = 0$$

En évaluant au point $\cos\theta$, on trouve que

$$n^2P(\cos\theta) - \cos(\theta)P'(\cos\theta) + \sin^2(\theta)P''(\cos\theta) = 0$$

ce qui se réécrit

$$\boxed{n^2f(\theta) + f''(\theta) = 0}$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + n^2 = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = -4n^2 < 0$, et les racines sont $r_+ = i\,n$ et $r_- = -i\,n$. Les solutions sont donc les fonctions

$$\begin{aligned} f(\theta) &= e^{0\theta}\left(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\right) \\ &= \boxed{\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)} \end{aligned}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

/6 **b)** Montrer que $\mu = 0$ et $\lambda \in \{-1, 1\}$.

— 2,5 points pour λ
— 3,5 points pour θ

On sait que $f(\theta) = P(\cos\theta)$. En particulier, f est paire, donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & f(-\theta) = f(\theta) \\ \Longrightarrow\ & \lambda\cos(n\theta) - \mu\sin(n\theta) = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta) \\ \Longrightarrow\ & -\mu\sin(n\theta) = \mu\sin(n\theta) \\ \Longrightarrow\ & 2\mu\sin(n\theta) = 0 \end{aligned}$$

En particulier, avec $\theta = \dfrac{\pi}{2n}$, on a $\sin(n\theta) = 1$, d'où $2\mu = 0$, et donc $\boxed{\mu = 0}$.

On a donc $f(\theta) = P(\cos\theta) = \lambda\cos(n\theta)$, et donc en évaluant en $\theta = 0$, on a $f(0) = P(1) = \lambda$. Mais par ailleurs, en évaluant $(\star)$ en 1, on trouve que

$$P(1)^2 + 0 = 1$$

donc $\lambda^2 = 1$. On en conclut que $\boxed{\lambda \in \{-1, 1\}}$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$, appelé le n-ième polynôme de Tchebychev, tel que

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}$$

5) a) Montrer que le couple $\left(T_n, \dfrac{1}{n}T_n'\right)$ est solution de $(\star)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Indication : on pourra montrer que le polynôme

$$R = \quad T_n^2 + \frac{1}{n^2}(1 - X^2)(T_n')^2 - 1$$

/5 admet une infinité de racines.

En dérivant la relation $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ selon θ, on trouve que

$$T_n'(\cos\theta) \times (-\sin\theta) = -n\sin(n\theta)$$

et donc

$$\left(T_n'(\cos\theta)\right)^2 \times \sin^2\theta = n^2\sin^2(n\theta)$$

ou encore

$$\frac{1}{n^2}\left(T_n'(\cos\theta)\right)^2 \times (1 - \cos^2\theta) = \sin^2(n\theta)$$

Ainsi, lorsqu'on évalue R en $\cos\theta$, on trouve que

$$R(\cos\theta) = \cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) - 1 = 0$$

Donc, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on voit que $\cos\theta$ est racine de R. En particulier, tout élément de $[-1, 1]$ est racine de R. Puisque R possède une infinité de racines, c'est le polynôme nul. Donc $R = 0$. On en déduit que

$$T_n^2 + (1 - X^2)\left(\frac{1}{n}T_n'\right)^2 - 1$$

donc $\left(T_n, \dfrac{1}{n}T_n'\right)$ est solution de $(\star)$.

b) Déterminer finalement toutes les solutions de $(\star)$. Justifier précisément.

/6

Analyse : si P est constant, on a vu que $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ sont solutions de $(\star)$.

Si P est non constant, on a vu que si (P, Q) est solution, alors $Q = \dfrac{1}{n}P'$ avec $n = \deg(P)$ et de plus la fonction $f(\theta) = P(\cos\theta)$ vérifie $f(\theta) = \lambda\cos(n\theta)$ avec $\lambda \in \{-1, 1\}$. Donc $P(\cos\theta) = \lambda\cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

— Si $P(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, alors $P = T_n$ car T_n est l'unique polynôme qui vérifie cette relation. Dans ce cas, $(P, Q) = \left(T_n, \dfrac{1}{n}T_n'\right)$.
— Si $P(\cos\theta) = -\cos(n\theta)$, alors $(-P)(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, si bien que $-P = T_n$, ou encore $P = -T_n$. Dans ce cas, $(P, Q) = \left(-T_n, -\dfrac{1}{n}T_n'\right)$.

Synthèse : on a vu que $(1,0)$ et $(-1,0)$ sont bien solutions de $(\star)$. De plus, à la question précédente, on a vu que $\left(T_n, \dfrac{1}{n}T_n'\right)$ est solution de $(\star)$, et on vérifie facilement que $\left(-T_n, -\dfrac{1}{n}T_n'\right)$ est également solution de $(\star)$.

Finalement :

$$\mathcal{S} = \boxed{\left\{ \left(\pm T_n, \pm\frac{1}{n}T_n'\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{(\pm 1, 0)\}}$$